6-Дәріс

<u>Тақырыбы:</u> Бірінші және екінші тамаша шектер. Күрделі функция шегі. Ақырсыз аз және ақырсыз үлкен функциялардың шектері. Ақырсыз аз функцияларды салыстыру.

Теорема 3 (күрделі функцияның шегі туралы теорема). Егер $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{y\to b} g(y) = g(b)$ болса, онда $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g(b)$.

Шексіз аз және шексіз үлкен шамалар

Анықтама. *Егер* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, *онда* $f(x)$ ***функциясы*** $x \to \infty$ ***–ға ұмтылғанда шексіз аз*** *(ш.а.) шама деп аталады.*

Теорема 1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ теңдігі орындалуы үшін $f(x) = A + \alpha(x)$ ($\alpha(x)$, $x \to a$-ға ұмтылғанда шексіз аз шама) теңдігі орындалуы қажетті және жеткілікті. Сонымен,

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = A + \alpha(x), \quad \alpha(x) \to 0 \quad (x \to a)$$

Теорема 2. Егер $x \to a$ $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x)$ шексіз аз шамалар болса, онда олардың **қосындысы** мен **көбейтіндісі шексіз аз** болады.

Теорема 3. $\alpha(x)$, $x \to a$ шексіз аз шама және $\varphi(x)$ шенелген функцияның көбейтіндісі $x \to a$ шексіз аз болады, яғни $\alpha(x)\varphi(x)$ - шексіз аз шама.

Анықтама. Егер әрбір $\varepsilon > 0$ саны арқылы, $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x үшін

$$|f(x)| > \varepsilon$$

теңсіздігі орындалатындай $\delta(\varepsilon) > 0$ саны бар болса, онда $f(x)$ функциясы $x \to a$ **шексіз үлкен шама** немесе **қысқаша** $x \to a$ **шексіз үлкен** деп аталады да

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \text{ немесе } f(x) \to \infty \ (x \to a)$$

символдарымен белгіленеді.

Теорема 4. Егер a – нүктесінің белгілі бір маңайында $|f(x)| < M$ және $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$ болса, онда $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \varphi(x) = \infty$.

Теорема 5. Егер $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$ болса, онда $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{\varphi(x)} = 0$ $\varphi(x) \neq 0$, $x \neq a$.

Теорема 6. $x \to a$ ұмтылғанда бірдей таңбалы шексіз үлкен функциялардың қосындысы (осы таңбамен алынған) шексіз үлкен болады,

Теорема 7. $x \to a$ ұмтылғанда шексіз үлкен функциясы мен a нүктесінің маңайында шенелген функция қосындысы $x \to a$ ұмтылғанда шексіз үлкен функция болады.

Шексіз аз шамаларды салыстыру

Екі шексіз аз шамаларды $\alpha(x)$, $\beta(x)$ $x \to a$ салыстыру үшін олардың бөліндісінің шегін табамыз:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C, \tag{3}$$

1) егер $C \neq 0$, онда $\alpha(x)$ және $\beta(x)$ $x \to a$ реті бірдей шексіз аз шамалар.

2) егер $C = 0$, онда $\alpha(x)$ функциясы $\beta(x)$ функциясына салыстырғанда кішкене болу реті жоғары деп аталады да

$$\alpha(x) = 0(\beta(x)), \tag{4}$$

символымен белгіленеді және $x \to a$ ұмтылғанда $\alpha(x)$ функциясын $\beta(x)$ функциясымен салыстырғанда о кішкене деп аталады.

3) егер $C = 1$, яғни

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1, \tag{5}$$

онда $x \to a$ (x a-ға ұмтылғанда $\alpha(x)$ және $\beta(x)$ функцияларын эквивалентті, асимптоталық тең дейді де, $\alpha(x) \sim \beta(x)$ $(x \to a)$ символымен белгілейді).

Екі тамаша шек

Жиі пайдаланатын екі тамаша шекті келтірейік:

1^0. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (бірінші тамаша шек), (6)

2^0. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ немесе (7)

$\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$, $e \approx 2{,}71828$ (екінші тамаша шек) (8)

Функцияның шегін тапқанда басқа да маңызды шектерді қолданады:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a e$.

5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1 + x)^{\mu} - 1}{x} = \mu$ $(\mu \neq 0)$.